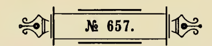
Второй серіи V-го семестра № 9.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики.



№ 657.

Содержаніе: О построеніи на вершинахъ параллелограмной сѣти треугольника, подобнаго данному. *М. Зимина.* — Новая кристаллографія. *В. Брагга.* — Полемика: Два замѣчанія по поводу рѣчи Ричардсона: «Электроны и теплота», помѣщенной въ № 644 — 645 «Вѣстника». *Н. А. Гезехуса.* — Книги и брошюры, поступившія въ редакцію. — Задачи №№ 327 — 330 (6 сер.). — Рѣшенія задачъ. № 282 (6 сер.). — Объявленія.

О построеніи на вершинахъ параллелограмной сѣти треугольника, подобнаго данному.

М. Зимина.

§ 1. Задача, рѣшеніе которой составляетъ предметъ настоящей статьи, заключается въ слѣдующемъ.

На плоскости дана сѣть параллелограммовъ, образованная двумя системами параллельныхъ, равноотстоящихъ въ каждой системѣ прямыхъ. Требуется построить треугольникъ, который былъ бы подобенъ данному, и вершины котораго находились бы на вершинахъ данной сѣти.

Рѣшеніе задачи оказывается очень простымъ, если воспользоваться комплексными числами и ихъ геометрическимъ представленіемъ.

Возьмемъ (см. черт.) какую-нибудь вершину сѣти за начало O прямоугольныхъ координатъ, ось OX направимъ по одной изъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точку O, а ось OY опредѣлится, какъ перпендикуляръ изъ O къ прямой OX. Каждой точкѣ плоскости съ координатами x, y будетъ соотвѣтствовать комплексное число $z = x + yi$, и обратно.

Разсмотримъ затѣмъ параллелограммъ $OPQR$, принадлежащій сѣти, вершина P котораго лежитъ на положительной части оси OX,

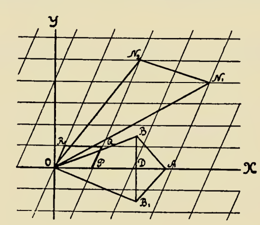
а вершины Q и R — въ области положительныхъ y-овъ. Пусть точкамъ P и R соотвѣтствуютъ числа:

$$\omega_1 = 1 \quad \text{и} \quad \omega_2 = m + ni, \quad n > 0.$$

Числами m и n, какъ легко видѣть, характеризуется видъ данной параллелограммной сѣти. Векторъ, соединяющій точку O съ какой-нибудь вершиной сѣти, есть геометрическая сумма векторовъ OP и OR, помноженныхъ каждый на цѣлое число. Поэтому каждая вершина сѣти опредѣляется комплекснымъ числомъ вида

$$\omega_1 x + \omega_2 y,$$

гдѣ x и y — цѣлыя вещественныя числа, положительныя или отрицательныя. Сумма или разность двухъ чиселъ вида (1) будетъ числомъ того же вида.



Построимъ на координатной плоскости треугольникъ OAB, которому долженъ быть подобенъ искомый треугольникъ, и расположимъ этотъ треугольникъ такъ, чтобы вершина O совпадала съ началомъ координатъ, а вершина A находилась на положительной части оси OX; третья же вершина можетъ занимать или положеніе B надъ осью OX или положеніе B_1 подъ осью OX. Треугольники OAB и OAB_1 будутъ симметричны относительно прямой OX. Точкамъ A, B, B_1 пусть соотвѣтствуютъ числа

$$a, \quad \beta + \gamma i, \quad \beta - \gamma i \quad (a > 0, \quad \gamma > 0).$$

Пусть треугольникъ $M_1 M_2 M_3$, вершины котораго лежатъ на

вершинахъ сѣти и опредѣляются комплексными числами

$$\omega_1\xi_1+\omega_2\eta_1,\quad \omega_1\xi_2+\omega_2\eta_2,\quad \omega_1\xi_3+\omega_2\eta_3,$$

будетъ подобенъ треугольнику OAB. Перемѣщаемъ треугольникъ $M_1M_2M_3$ параллельно самому себѣ такъ, чтобы вершина его M_3, соотвѣтствующая вершинѣ O треугольника OAB, совпала съ началомъ координатъ; въ результатѣ получимъ треугольникъ ON_1N_2 (см. черт.), вершины N_1, N_2 котораго будутъ также находиться на вершинахъ сѣти и опредѣлятся комплексными числами

$$\omega_1\xi_1+\omega_2\eta_1-(\omega_1\xi_3+\omega_2\eta_3)=\omega_1(\xi_1-\xi_3)+\omega_2(\eta_1-\eta_3),$$

$$\omega_1\xi_2+\omega_2\eta_2-(\omega_1\xi_3+\omega_2\eta_3)=\omega_1(\xi_2-\xi_3)+\omega_2(\eta_2-\eta_3).$$

Обратно, если знаемъ треугольникъ ON_1N_2, удовлетворяющій условіямъ задачи, то изъ него путемъ параллельнаго перенесенія можемъ получить безчисленное множество другихъ треугольниковъ того же рода, т. е. такихъ треугольниковъ, которые были бы подобны данному треугольнику OAB, и вершины которыхъ были бы расположены на параллелограммной сѣти. Какъ видно отсюда, общая задача сводится къ разысканію частнаго треугольника ON_1N_2, одна изъ вершинъ котораго находится въ началѣ координатъ.

Подразумѣвая подъ x, y, u и v цѣлыя вещественныя числа, представимъ комплексныя числа z_1 и z_2, соотвѣтствующія вершинамъ N_1 и N_2 треугольника ON_1N_2, въ видѣ

$$z_1=\omega_1x+\omega_2y=x+my+nyi,$$
$$z_2=\omega_1u+\omega_2v=u+mv+nvi. \tag{2}$$

Треугольникъ ON_1N_2 будетъ сходственно расположенъ*) или съ треугольникомъ OAB, или съ треугольникомъ OAB_1. Соотвѣтственно этимъ двумъ случаямъ, числа x, y, u, v должны удовлетворять или соотношенію

$$\frac{u+mv+nvi}{x+my+nyi}=\frac{\beta+\gamma i}{\alpha} \tag{3}$$

или соотношенію

$$\frac{u+mv+nvi}{x+my+nyi}=\frac{\beta-\gamma i}{\alpha}. \tag{3'}$$

Освобождая уравненія (3) и (3') отъ знаменателей и приравнивая

*) Это значитъ что сходственныя вершины треугольниковъ, о которыхъ говорится, расположены въ одинаковомъ круговомъ порядкѣ: или по стрѣлкѣ часовъ или противъ стрѣлки.

отдѣльно вещественныя и мнимыя части, получимъ двѣ системы уравненій съ вещественными числами:

$$\begin{aligned} \beta x + (\beta m - \gamma n)\, y &= au + amv, \\ \gamma x + (\beta n + \gamma m)\, y &= anv; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \beta x + (\beta m + \gamma n)\, y &= au + amv, \\ -\gamma x + (\beta n - \gamma m)\, y &= anv. \end{aligned} \tag{4'}$$

Такимъ образомъ, задача свелась къ рѣшенію, въ цѣлыхъ числахъ, системъ (4) и (4′), состоящихъ каждая изъ двухъ однородныхъ уравненій первой степени съ четырьмя неизвѣстными. Рѣшенія $x=0$, $y=0$ и $u=0$, $v=0$ исключаются.

Система (4′) отличается отъ (4) только знакомъ при γ. Простѣйшій случай будетъ тотъ, когда m, n, a, β, γ суть числа раціональныя. Тогда системы (4) и (4′) навѣрное будутъ имѣть раціональныя, а, слѣдовательно, въ силу однородности уравненій, и цѣлыя рѣшенія. Для нахожденія всѣхъ возможныхъ рѣшеній приводимъ уравненія (4) или (4′) къ виду

$$p_1 x + q_1 y + r_1 u + s_1 v = 0, \tag{5}$$

$$p_2 x + q_2 y + s_2 v = 0, \tag{6}$$

гдѣ коэффиціенты суть числа цѣлыя, не имѣющія въ каждомъ уравненіи общихъ дѣлителей. Рѣшая уравненіе (6) въ цѣлыхъ числахъ обычными пріемами, выразимъ неизвѣстныя x, y, v черезъ перемѣнныя t_1 и t_2. Затѣмъ найденныя для x, y, v выраженія подставляемъ въ (5), что дастъ намъ уравненіе съ неизвѣстными t_1, t_2, u. Изъ послѣдняго уравненія опредѣляемъ неизвѣстныя t_1, t_2, и u въ зависимости отъ двухъ новыхъ независимыхъ перемѣнныхъ τ_1 и τ_2, послѣ чего выражаемъ неизвѣстныя x, y, v черезъ τ_1 и τ_2. Далѣе, по формуламъ (2) опредѣляемъ z_1 и z_2. Наконецъ, прибавляя къ числамъ 0, z_1, z_2 комплексное число вида

$$\omega_1 \xi + \omega_2 \eta,$$

гдѣ ξ и η — цѣлыя вещественныя числа, мы получимъ три числа

$$\omega_1 \xi + \omega_2 \eta, \quad \omega_1 (x+\xi) + \omega_2 (y+\eta), \quad \omega_1 (u+\xi) + \omega_2 (v+\eta),$$

опредѣляющія вершины треугольниковъ, удовлетворяющихъ поставленнымъ условіямъ. Присоединяя сюда еще и тѣ рѣшенія, которыя получатся такимъ же путемъ изъ системы (4′), опредѣлимъ всѣ возможные треугольники, отвѣчающіе условіямъ задачи. Найденныя рѣшенія будутъ зависѣть, какъ видно изъ предыдущаго, отъ четырехъ произвольныхъ цѣлыхъ чиселъ: ξ, η, τ_1, τ_2.

Слѣдуетъ замѣтить, что изъ трехъ чиселъ α, β, γ, опредѣляющихъ видъ треугольника, мы всегда можемъ одно считать раціональнымъ, въ частности мы могли бы положить его равнымъ единицѣ. Будемъ предполагать, что α есть число раціональное.

Если между числами m, n, β, γ имѣются ирраціональныя, то системы (4, 4′) могутъ и не имѣть раціональныхъ, а, слѣдовательно, и цѣлыхъ рѣшеній. Задача о построеніи треугольника въ этомъ случаѣ въ общемъ видѣ невозможна.

Предположимъ, что, кромѣ α, m и n суть также числа раціональныя. Въ такомъ случаѣ для возможности существованія цѣлыхъ рѣшеній системъ (4) и (4′) необходимо, чтобы числа β и γ также были раціональными. Въ самомъ дѣлѣ, предполагая, что въ системѣ (4) числа x, y, u, v имѣютъ нѣкоторыя опредѣленныя раціональныя значенія, мы можемъ разрѣшить уравненія (4) относительно β и γ, такъ какъ опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} x+my & -ny \\ ny & x+my \end{vmatrix} = (x+my)^2 + n^2y^2,$$

составленный изъ коэффиціентовъ при β и γ, не можетъ равняться нулю при x и y, отличныхъ отъ нуля. Въ результатѣ получимъ для β и γ раціональныя значенія. Вмѣстѣ съ тѣмъ раціональность чиселъ α, β, γ при раціональныхъ m и n будетъ и достаточнымъ условіемъ для возможности существованія цѣлыхъ рѣшеній системъ (4) и (4′).

Подобными же разсужденіями докажемъ, что, если при раціональныхъ α, β, γ уравненія (4) и (4′) имѣютъ цѣлыя рѣшенія, то числа m и n необходимо должны быть раціональными.

Перейдемъ къ разбору нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ поставленной общей задачи.

§ 2. Предположимъ, что на плоскости дана сѣть квадратовъ. Для этого случая въ общихъ формулахъ, приведенныхъ выше, принимаемъ

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = i, \quad m = 0, \quad n = 1.$$

Системы (4) и (4′) приводятся къ слѣдующимъ:

$$\beta x - \gamma y = \alpha u, \qquad \gamma x + \beta y = \alpha v; \tag{7}$$

$$\beta x + \gamma y = \alpha u, \qquad -\gamma x + \beta y = \alpha v. \tag{7'}$$

Согласно сказанному въ концѣ предыдущаго параграфа, для возможности существованія цѣлыхъ рѣшеній системъ (7) и (7′) необходимо и достаточно, чтобы β и γ были числами раціональными. Напримѣръ, на квадратной сѣти нельзя построить равносторонняго треугольника,

ибо, считая треугольникъ OAB равностороннимъ и принимая $\alpha = 2$, мы нашли бы, что $\beta = 1$, а $\gamma = \sqrt{3}$.

Примемъ, что стороны треугольника OAB выражаются раціональными числами

$$OA = \alpha = a, \quad OB = b, \quad AB = c.$$

Такъ какъ $\beta + \gamma i$ есть комплексное число, соотвѣтствующее вершинѣ B, то γ есть длина высоты BD треугольника OAB, опущенной изъ вершины B на основаніе OA, а β есть длина отрѣзка OD стороны OA (отъ вершины O до основанія высоты BD). Число β будетъ раціональнымъ при раціональности сторонъ a, b, c, и для возможности рѣшенія задачи необходимо и достаточно, чтобы длина γ высоты BD треугольника OAB была числомъ раціональнымъ, иначе говоря, чтобы площадь треугольника OAB выражалась раціональнымъ числомъ. Это же условіе будетъ справедливо и вообще для прямоугольной сѣти, если число m, измѣряющее одну сторону прямоугольника при другой, припятой за единицу, будетъ раціональнымъ.

Примѣръ. Пусть на квадратной сѣти требуется опредѣлить треугольники, подобные треугольнику со сторонами 13, 14, 15, площадь котораго равна 84. Принимая

$$OA = \alpha = 14, \quad OB = 15, \quad AB = 13,$$

находимъ:

$$OD = \beta = 9, \quad BD = \gamma = 12,$$

и система (7) обращается въ слѣдующую

$$9x - 12y = 14u, \quad 12x + 9y = 14v. \tag{8}$$

Изъ перваго уравненія видимъ, что x дѣлится на 2, и u дѣлится на 3, а изъ второго заключаемъ о дѣлимости y на 2 и v на 3. Поэтому полагаемъ:

$$x = 2x_1, \quad y = 2y_1, \quad u = 3u_1, \quad v = 3v_1. \tag{9}$$

Подставляя въ (8), получимъ по сокращеніи:

$$3x_1 - 4y_1 = 7u_1, \quad 4x_1 + 3y_1 = 7v_1. \tag{10}$$

Рѣшаемъ въ цѣлыхъ числахъ первое изъ уравненій системы (10):

$$x_1 = 4t_1 + t_2, \quad y_1 = 3t_1 - t_2, \quad u_1 = t_2, \tag{11}$$

и эти значенія подставляемъ во второе изъ уравненій (10), что даетъ:

$$25t_1 + t_2 = 7v_1;$$

отсюда находимъ:

$$t_2 = 7\tau_1 - 25t_1, \quad v_1 = \tau_1,$$

Значеніе для t_2 подставляемъ въ уравненія (11), а затѣмъ съ помощью уравненій (9) находимъ окончательно слѣдующія рѣшенія системы (8) въ цѣлыхъ числахъ:

$$x = 14\tau_1 - 42t_1, \quad y = -14\tau_1 + 56t_1, \quad u = 21\tau_1 - 75t_1, \quad v = 3\tau_1. \quad (12)$$

Комплексныя числа

$$14\tau_1 - 42t_1 + (-14\tau_1 + 56t_1)\,i, \quad 21\tau_1 - 75t_1 + 3\tau_1 i$$

опредѣлятъ вершины N_1, N_2 треугольника ON_1N_2, подобнаго и сходственно расположеннаго съ треугольникомъ OAB. Перенося треугольникъ ON_1N_2 параллельно самому себѣ такъ, чтобы вершина O его оказалась въ точкѣ $\xi + \eta i$, гдѣ ξ и η суть числа цѣлыя, получимъ новый треугольникъ съ вершинами

$$\begin{gathered} \xi + \eta i, \quad 14\tau_1 - 42t_1 + \xi + (-14\tau_1 + 56t_1 + \eta)i, \\ 21\tau_1 - 75t_1 + \xi + (3\tau_1 + \eta)i. \end{gathered} \quad (13)$$

Давая теперь числамъ ξ, η, t_1 τ_1 какія-угодно цѣлыя значенія, получимъ всѣ возможные треугольники, подобные и сходственно расположенные съ треугольникомъ OAB, вершины которыхъ будутъ находиться на вершинахъ квадратной сѣти. Для нахожденія треугольниковъ, сходственно расположенныхъ съ треугольникомъ OAB_1, нѣтъ необходимости рѣшать систему (7') въ предположеніи $\alpha = 14$, $\beta = 9$, $\gamma = 12$. Въ самомъ дѣлѣ, всѣ указанные треугольники мы можемъ получить изъ треугольниковъ (13), если для каждаго изъ послѣднихъ будемъ брать треугольникъ, симметричный съ нимъ относительно оси OX (или OY). На основаніи этого замѣчанія вершины всѣхъ возможныхъ треугольниковъ, сходственно расположенныхъ съ треугольникомъ OAB_1 и имѣющихъ вершины на вершинахъ сѣти, опредѣлятся комплексными числами

$$\begin{gathered} \xi - \eta i, \quad 14\tau_1 - 42t_1 + \xi - (-14\tau_1 + 56t_1 + \eta)\,i, \\ 21\tau_1 - 75t_1 + \xi - (3\tau_1 + \eta)\,i. \end{gathered} \quad (13')$$

Такимъ образомъ, выраженіями (13) и (13') опредѣляются всѣ искомые треугольники.

§ 3. Разсмотримъ еще ромбическую сѣть съ острымъ угломъ въ 60°. Для этого случая

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad m = \frac{1}{2}, \quad n = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Система (4) приводится къ слѣдующей:

$$2\beta x+(\beta-\sqrt{3}\gamma)\,y=2au+av,$$
$$2\gamma x+(\sqrt{3}\beta+\gamma)\,y=\sqrt{3}av. \tag{14}$$

Чтобы установить, при какихъ значеніяхъ β и γ система (14) имѣетъ цѣлыя рѣшенія, разрѣшаемъ уравненія (14) относительно β и γ:

$$\beta=a\frac{2xu+xv+yu+2yv}{2\,(x^2+xy+y^2)},\quad \gamma=\sqrt{3}\,a\,\frac{xv-yu}{2\,(x^2+xy+y^2)}.$$

Найденныя выраженія показываютъ, что число β должно быть раціональнымъ, а число γ должно быть равно произведенію $\sqrt{3}$ на раціональное число. Вмѣстѣ съ тѣмъ эти условія являются и достаточными. Дѣйствительно, если числа β и γ имѣютъ указанный характеръ, то первое изъ уравненій (14) имѣетъ раціональные коэффиціенты, а второе по раздѣленіи обѣихъ частей на $\sqrt{3}$ также будетъ имѣть раціональные коэффиціенты, и потому цѣлыя рѣшенія системы (14) существуютъ. Если бы, напримѣръ, треугольникъ OAB былъ равнобедреннымъ, и уголъ A былъ бы прямымъ, то, принимая $OA=a=1$, мы имѣли бы: $\beta=1$, $\gamma=1$. Вышеуказанное условіе относительно γ не выполняется, и потому на ромбической сѣти съ угломъ въ 60° нельзя построить равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника, а, слѣдовательно, нельзя построить и квадрата.

Для случая, когда стороны треугольника OAB выражаются раціональными числами a, b, c, необходимое и достаточное условіе возможности построенія треугольника, подобнаго треугольнику OAB, можетъ быть формулировано такъ: площадь треугольника со сторонами a, b, c должна выражаться произведеніемъ $\sqrt{3}$ на раціональное число.

Примѣръ. На ромбической сѣти построить треугольникъ, подобный треугольнику со сторонами 15, 8, 13.

Площадь заданнаго треугольника равна $30\sqrt{3}$, поэтому задача возможна. Принимаемъ

$$OA=a=15,\quad OB=8,\quad AB=13$$

и затѣмъ по этимъ значеніямъ находимъ:

$$\beta=OD=4,\quad \gamma=BD=4\sqrt{3}.$$

Система (14) послѣ подстановки указанныхъ значеній и нѣкоторыхъ преобразованій приводится къ слѣдующей:

$$8x-8y=30u+15v, \tag{15}$$
$$8x+8y=15v. \tag{16}$$

Изъ уравненія (16) видно, что v дѣлится на 8, принимая поэтому

$$v = 8t_1, \quad y = t_2,$$

найдемъ изъ него путемъ подстановки:

$$x = 15t_1 - t_2.$$

Полученныя для x, y, v значенія подставляемъ въ (15), что даетъ послѣ упрощеній:

$$-8t_2 = 15u,$$

откуда

$$t_2 = 15\tau_1,$$

такъ что окончательно мы получаемъ слѣдующія рѣшенія системы уравненій (15) и (16) въ цѣлыхъ числахъ:

$$x = 15t_1 - 15\tau_1, \quad y = 15\tau_1, \quad u = -8\tau_1, \quad v = 8t_1.$$

По этимъ рѣшеніямъ и формуламъ (2) найдемъ комплексныя числа, опредѣляющія вершины N_1, N_2 треугольника ON_1N_2, подобнаго и сходственно расположеннаго съ треугольникомъ OAB. Остается затѣмъ треугольникъ ON_1N_2 перенести параллельно самому себѣ такъ, чтобы вершина его O заняла мѣсто точки, опредѣляемой числомъ

$$\omega_1\xi + \omega_2\eta = \xi + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\eta.$$

Такимъ образомъ, для опредѣленія вершинъ треугольниковъ, подобныхъ и сходственно расположенныхъ съ треугольникомъ OAB, получаемъ слѣдующія числа:

$$\xi + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\eta, \quad 15t_1 - 15\tau_1 + \xi + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(15\tau_1 + \eta),$$
$$-8\tau_1 + \xi + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(8\tau_1 + \eta), \tag{17}$$

гдѣ ξ, η, t_1, τ_1 — произвольныя цѣлыя вещественныя числа.

Систему (4'), опредѣляющую треугольники, сходственно расположенные съ треугольникомъ OAB_1, надлежитъ разсмотрѣть особо. Изъ нея послѣ подстановки значеній, относящихся къ разбираемому случаю, получимъ послѣ упрощеній:

$$8x + 16y = 30u + 15v, \tag{18}$$

$$-8x = 15v. \tag{19}$$

Изъ уравненія (19) имѣемъ:

$$x = 15t_1, \quad v = -8t_1.$$

Эти значенія подставляемъ въ уравненіе (18) и изъ полученнаго уравненія опредѣляемъ:

$$8y = 15u - 120t_1.$$

Усматривая отсюда, что u должно дѣлиться на 8, полагаемъ $u = 8\tau_1$ и даемъ послѣднему уравненію видъ:

$$y = 15\tau_1 - 15t_1.$$

Перемѣнныя x, y, u, v выражены, такимъ образомъ, черезъ t_1 и τ_1. По найденнымъ рѣшеніямъ составляемъ, какъ и раньше, три комплексныхъ числа, опредѣляющихъ вершины треугольниковъ, подобныхъ и сходственно расположенныхъ съ треугольникомъ OAB_1; именно:

$$\xi + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\eta, \qquad 15t_1 + \xi + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)(15\tau_1 - 15t_1 + \eta),$$
$$8\tau_1 + \xi + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)(-8t_1 + \eta). \tag{20}$$

Выраженія (17) и (20) опредѣляютъ исчерпывающимъ образомъ всѣ треугольники, удовлетворяющіе поставленнымъ требованіямъ.

Новая кристаллографія.

В. Брагга.

Заглавіе настоящей статьи можетъ, пожалуй, показаться слишкомъ громкимъ. Однако, слѣдуетъ имѣть въ виду, что новые методы анализа строенія кристалловъ при помощи спектрометрическаго изслѣдованія x-лучей открываютъ собою совершенно новую эпоху въ изслѣдованіи характерныхъ чертъ кристалловъ. Между новой и старой кристаллографіей существуетъ приблизительно то же отношеніе, какъ между ботаникой біологической и систематической. До настоящаго времени кристаллографія занималась главнымъ образомъ описаніемъ наружной формы кристалловъ, измѣреніемъ угловъ, образуемыхъ гранями ихъ, а главнымъ образомъ изученіемъ степени симметріи въ

кристаллахъ. Принимая во вниманіе степень симметріи, кристаллы были подраздѣлены на 32 класса. Первый классъ совсѣмъ не обладаетъ симметріей; примѣромъ можетъ служить тіосульфатъ кальція. 32-ой классъ обладаетъ всѣми видами симметріи; къ нему принадлежатъ плавиковый шпатъ, алмазъ, шпинель.

Новые методы даютъ намъ возможность проникнуть своимъ изслѣдованіемъ въ расположеніе атомовъ въ кристаллѣ, показывая этимъ намъ его основныя характерныя черты, въ то время какъ его внѣшняя форма представляетъ собою лишь простое проявленіе и слѣдствіе этихъ характерныхъ чертъ. При помощи новыхъ методовъ мы узнаемъ, какъ атомы склонны располагаться для того, чтобы получилось равновѣсіе дѣйствующихъ между атомами силъ. Такимъ образомъ мы знакомимся съ этими силами съ такой точки зрѣнія, которая не только нова, но и гораздо ближе къ тому, что намъ нужно видѣть, чѣмъ всякая другая, бывшая намъ доступной до сихъ поръ. Силы скрѣпляющія атомы между собою, понятно, управляютъ также образованіемъ матеріальныхъ тѣлъ вообще, такъ что новое ученіе имѣетъ значеніе первѣйшей важности и для физики, и для химіи. Опредѣленіе структуры кристалла приводитъ къ чему-то гораздо большему, чѣмъ простое наблюденіе формы, имѣющее лишь чисто спеціальный, изолированный интересъ. А именно, изученіе этой структуры становится способомъ расширенія нашихъ познаній объ атомахъ и молекулахъ вообще и устанавливаетъ связь между ученіемъ о кристаллахъ и главнѣйшими линіями новѣйшаго научнаго прогресса.

Разбираемое нами здѣсь новое направленіе имѣетъ большое значеніе также и въ другихъ отношеніяхъ. Оно открываетъ намъ дѣйствіе силъ не только междуатомныхъ, но и внутриатомныхъ. Мы въ состояніи въ настоящее время опредѣлить длину волнъ x-лучей и такимъ образомъ впервые получить количественную характеристику ихъ главныхъ свойствъ. Мы въ состояніи опредѣлить длину волнъ спеціальныхъ лучей, испускаемыхъ каждымъ изъ извѣстныхъ намъ элементовъ подъ вліяніемъ соотвѣтствующаго агента, и вотъ тутъ-то новое ученіе пролило свѣтъ на нѣкоторыя самыя важныя и самыя интересныя черты періодической системы элементовъ. Дѣло въ томъ, что спеціальный видъ x-лучей, испускаемый какимъ-либо атомомъ, характеренъ для послѣдняго и зависитъ отъ внутренней его структуры. Правда, до нѣкоторой степени то же самое можно сказать объ обыкновенныхъ лучахъ, испускаемыхъ атомомъ, но x-лучи обладаютъ гораздо болѣе простыми свойствами и, повидимому, зависятъ отъ болѣе основныхъ элементовъ внутренняго строенія атома.

Новый методъ, въ сущности, простъ, хотя примѣненіе его на практикѣ требуетъ большой внимательности и настойчивости.

Сначала разсмотримъ аналогичную проблему изъ болѣе простой области оптики. Если поверхность воды покрыта тонкой пленкой масла, и на эту пленку падаетъ бѣлый свѣтъ, то отраженный свѣтъ часто

бываетъ интенсивно окрашеннымъ. Здѣсь мы имѣемъ въ сущности двѣ отражающія поверхности, одну между воздухомъ и масломъ и другую между масломъ и водой. Падающій свѣтъ отражается частью отъ одной, а частью отъ другой изъ этихъ поверхностей, и оба отраженныхъ пучка свѣта могутъ находиться между собою въ такихъ отношеніяхъ, что получится или взаимное усиленіе, или взаимное уничтоженіе, или же нѣчто находящееся по срединѣ между этими крайностями. Все зависитъ отъ толщины пленки, отъ длины световой волны и отъ угла образуемаго пучками и поверхностями. При данныхъ углѣ паденія и толщинѣ пленки, часть спектра, характеризующаяся извѣстной длиной волны, отражается, усиливаясь; сосѣднія же части взаимно уничтожаются, и такимъ образомъ отраженный свѣтъ является окрашеннымъ.

Если вмѣсто двухъ поверхностей, находящихся на извѣстномъ разстояніи между собою, мы будемъ имѣть большое число параллельныхъ плоскостей, расположенныхъ на одинаковомъ разстояніи одна отъ другой, то мы получимъ измѣненіе въ интенсивности эффекта, сущность же явленія останется той же. Отраженная часть спектра будетъ гораздо болѣе узкой, и въ то же время отраженный свѣтъ, заключающійся внутри болѣе суженныхъ границъ спектра, станетъ гораздо болѣе интенсивнымъ. Эффектъ послѣдняго рода въ природѣ встрѣчается довольно рѣдко; примѣръ такого эффекта мы видимъ на красивой окраскѣ хлорновато-кислаго калія. Когда кристаллъ хлорновато-кислаго калія образуется въ результатѣ испаренія раствора, то онъ обладаетъ изъ ряду вонъ выходящимъ свойствомъ располагаться въ видѣ послѣдовательныхъ слоевъ одинаковой толщины, относительно котрыхъ можно сказать, что они скомбинированы по два согласно извѣстнаго рода гемитропіи. Каждая изъ поверхностей, раздѣляющихъ слои, можетъ отражать свѣтъ, и очень многочисленные пучки свѣта могутъ взаимно усиливаться лишь при извѣстной, строго опредѣленной длинѣ волны. Такимъ образомъ отраженный пучекъ будетъ въ большой степени монохроматичнымъ и очень яркимъ. Кристаллъ, полученный Р. Ф. Вудомъ (R. F. Wood) отражаетъ при извѣстномъ углѣ паденія желтый свѣтъ, который при спектроскопическомъ изслѣдованіи представляется намъ въ видѣ узкой полоски, ширина которой не на много больше, чѣмъ разстояніе между желтыми линіями ртути.

Длина волны свѣта, отражаемаго такимъ кристалломъ, различна въ зависимости отъ угла паденія. Если извѣстны длина волны и уголъ паденія, то легко вычислить промежутки между поверхностями.

Анализъ структуры кристалловъ при помощи x-лучей основанъ на аналогичномъ физическомъ фактѣ. Атомы кристалловъ распредѣлены съ извѣстной правильностью. Напримѣръ, можно быть увѣреннымъ, что природная грань представляетъ собою поверхность, по которой распредѣлены атомы, располагаясь на одномъ и томъ же уровнѣ; позади подобной грани долженъ находиться рядъ поверхностей, пред-

ставляющихъ изъ себя грани потенціальныя, параллельныя существующей грани. Слой, состоящій изъ атомовъ, можетъ отражать эфирныя волны подобно тому, какъ заборъ изъ кольевъ можетъ отражать звуковыя волны. Отражающая поверхность не должна быть непремѣнно сплошной ни въ случаѣ отраженія свѣта, ни въ случаѣ отраженія звука. Слой изъ атомовъ отражаетъ лишь весьма незначительную часть изъ падающаго на него пучка эфирныхъ волнъ. Когда x-лучи падаютъ на грань кристалла, то на большомъ числѣ послѣдовательныхъ слоевъ происходятъ частичныя отраженія. И вотъ въ данномъ случаѣ, если имѣется соотвѣтствующее отношеніе между длиною волны, угломъ паденія и разстояніемъ между слоями, то частичныя отраженія усиливаютъ одно другое, и въ результатѣ получается пучекъ лучей, сила котораго достаточна для того, чтобы его наблюдать и измѣрять обычными нашими методами. Выходитъ такимъ образомъ, что между длиною волнъ x-лучей и разстояніемъ между послѣдовательными слоями того же порядка, существуетъ то же соотношеніе, что и между длиною волнъ обыкновенныхъ лучей и разстояніемъ между отражающими поверхностями хлорновато-кислаго калія. Въ однихъ случаяхъ разстояніе между слоями атомовъ больше, чѣмъ въ другихъ; чѣмъ больше это разстояніе, тѣмъ меньше долженъ быть уголъ паденія, для того чтобы получилось замѣтное отраженіе. На практикѣ мы пользуемся лучами, обладающими опредѣленной длиной волны, главнымъ образомъ x-лучами, испускаемыми родіемъ и обладающими длиною волны въ 0,614 единицъ Ангстрёма (Ångstrom). Мы замѣчаемъ уголъ, при которомъ извѣстная грань кристалла, природнаго или искусственно полученнаго, отражаетъ эти лучи; тогда уже легко вычислить разстояніе между поверхностями атомныхъ слоевъ, параллельными грани. Если это продѣлать для немногихъ самыхъ важныхъ граней, то установленіе распредѣленія атомовъ въ кристаллѣ становится дѣломъ математическаго анализа полученныхъ результатовъ. Возьмемъ слѣдующій разъясняющій примѣръ. Находясь въ виноградникѣ, мы замѣчаемъ, что мы можемъ себѣ представить лозы размѣщенными по рядамъ во многихъ направленіяхъ. Представимъ себѣ, что мы измѣримъ разстояніе между рядами, направляющимися съ востока на западъ, и найдемъ его равнымъ тремъ метрамъ; затѣмъ мы установимъ, что разстояніе между рядами, имѣющими направленіе съ сѣверо-востока на юго-западъ, равно двумъ метрамъ. Пусть мы послѣ этого начертимъ по извѣстному масштабу систему линій, представляющую эти ряды и разстоянія между ними. Затѣмъ мы чертежъ представимъ кому-либо не видѣвшему виноградника, для того, чтобы онъ опредѣлилъ схему, по которой виноградникъ посаженъ. Положеніе этого лица будетъ тогда схожимъ съ положеніемъ изслѣдователя, пользующагося новымъ методомъ изслѣдованія кристалловъ. Разница будетъ состоять главнымъ образомъ въ томъ, что послѣдній будетъ оперировать въ трехъ измѣреніяхъ, а первый въ двухъ.

Замѣтимъ, впрочемъ, что полученныя данныя не приводятъ сразу къ вполнѣ опредѣленному результату. Если лицо, получившее вышеуказанный чертежъ, поставитъ на всѣхъ точкахъ пересѣченія крестики, изображающіе собою лозы, то получится извѣстная схема. Но условія проведенія линій будутъ удовлетворены, если крестики поставить не на всѣхъ точкахъ пересѣченія, но лишь въ нѣкоторыхъ избранныхъ; здѣсь возможенъ цѣлый рядъ варіантовъ, какъ въ этомъ легко убѣдиться. Если, однако, знать болѣе или менѣе точно, сколько лозъ помѣщается на извѣстной площади, то можно быстро дѣлать выборъ между различными варіантами размѣщенія лозъ, такъ какъ эти варіанты различаются значительно въ смыслѣ густоты насажденія лозъ. Болѣе опредѣленный результатъ можетъ быть полученъ также такимъ образомъ, что будетъ опредѣлено разстояніе между рядами, идущими еще въ другихъ какихъ-либо направленіяхъ.

Если обратимся къ кристалламъ, то здѣсь опредѣленному рѣшенію задачи способствуетъ знакомство съ удѣльнымъ вѣсомъ, такъ какъ зная послѣдній, можно вычислить, сколько молекулъ заключается въ кубическомъ сантиметрѣ.

Подобнымъ путемъ мы, напримѣръ, узнаемъ, какъ располагаются атомы углерода для образованія алмаза. Нелегко обрисовать всѣ детали структуры, не имѣя модели; однако, въ нѣсколькихъ словахъ представленіе объ этой структурѣ дать можно. Достаточно указать на то, что каждый атомъ углерода находится въ центрѣ правильнаго тетраэдра, на вершинахъ угловъ котораго расположены четыре ближайшихъ сосѣда этого атома. Разстояніе между каждыми двумя сосѣдними атомами въ кристаллѣ равно 1.53 Ангстрёмовыхъ единицъ ($1 \mathring{A} U = {}^{1}/_{100000000}$ *см.*). Тетраэдрическія соотношенія находятся въ полномъ согласіи съ четырехвалентностью углерода, установленной химиками. Равнымъ образомъ интересно прослѣдить на модели, съ какой легкостью углеродные атомы соединяются въ цѣпи по шести.

Теперь возникаетъ вопросъ, не труднѣе ли анализировать кристаллъ, химическій составъ котораго болѣе сложенъ, чѣмъ составъ алмаза, состоящаго исключительно изъ атомовъ углерода. Безъ сомнѣнія это такъ; и мы должны быть довольны, если сможемъ примѣнить новый методъ сначала къ кристалламъ сравнительно простого состава и высокой степени симметріи. Здѣсь мы уже касаемся чрезвычайно интереснаго вопроса объ отношеніи молекулы къ кристалллу.

Возьмемъ какой-нибудь дѣйствительный случай, напримѣръ, случай кристалла магнитнаго желѣзняка Fe_3O_4, структура котораго недавно была опредѣлена. Этотъ кристаллъ встрѣчается въ формѣ правильныхъ октаэдровъ. Если мы проанализируемъ одну изъ граней такого октаэдра, то мы найдемъ, что спектрометръ обнаруживаетъ присутствіе отражающихъ поверхностей, параллельныхъ этой грани и расположенныхъ одна отъ другой на разстояніи 4.80 Ангстрёмовыхъ единицъ ($4.80 \mathring{A} U$). Что содержатъ эти поверхности, — атомы или

молекулы, желѣзо или кислородъ, или, можетъ быть, комбинаціи этихъ элементовъ?

Самымъ общимъ отвѣтомъ на этотъ вопросъ будетъ, что для того, чтобы вызвать интерференцію x-лучей, которая составляетъ основной фактъ въ описываемомъ методѣ, всѣ поверхности должны быть совершенно одинаковы. Гдѣ бы атомы ни находились, на плоскости, съ двухъ сторонъ плоскости или вблизи плоскости, ихъ отношеніе ко всѣмъ плоскостямъ должно быть одинаковымъ. Въ дѣйствительности атомы не могутъ лежать въ плоскости, такъ какъ они обладаютъ извѣстнымъ объемомъ. Они могутъ находиться частью съ одной стороны плоскости, частью съ другой; они не должны лежать симметрично съ обѣихъ сторонъ плоскости. Плоскости не содержатъ ни атомовъ, ни молекулъ, онѣ содержатъ замѣщающія точки.

Представимъ себѣ, что передъ нами обои, содержащіе какой-либо сложный рисунокъ, состоящій изъ цвѣтовъ и листьевъ. Выберемъ любую замѣщающую точку въ этомъ рисункѣ, напримѣръ, верхушку какого-либо цвѣтка; отмѣтимъ эту точку вездѣ, гдѣ бы она ни находилась. Мы тогда увидимъ, что мы сможемъ провести двѣ серіи параллельныхъ линій черезъ эти точки (на самомъ дѣлѣ, это можетъ быть произведено самымъ различнымъ образомъ). Разстоянія между этими линіями соотвѣтствуютъ разстояніямъ, установленнымъ въ кристаллахъ. Если бы мы выбрали другую замѣщающую точку, напримѣръ, то мѣсто, гдѣ какой-либо листъ прикрѣпленъ къ своему стебельку, то мы получили бы серіи линій съ такими же точно разстояніями, какъ и въ первомъ случаѣ. Подобно этому въ случаѣ кристалла не имѣетъ значенія, какой атомъ мы выберемъ въ качествѣ замѣщающаго молекулу или группу молекулъ или что-нибудь другое, повторяющееся съ извѣстной правильностью въ пространствѣ. Избравши въ каждой изъ структурныхъ единицъ какую-либо точку въ качествѣ замѣщающей эту единицу, мы можемъ черезъ избранныя нами такимъ образомъ точки провести плоскости; нашъ методъ устанавливаетъ разстоянія между этими плоскостями. Укажемъ, что въ магнитномъ желѣзнякѣ структурная единица содержитъ двѣ молекулы, или, лучше сказать, шесть атомовъ желѣза и восемь атомовъ кислорода.

Такимъ образомъ, даже послѣ того, какъ мы установили положеніе замѣщающихъ точекъ, у насъ еще впереди остается много работы для опредѣленія точнаго положенія каждаго атома. Если возвратиться къ примѣру съ обоями, то мы можемъ сказать, что и послѣ опредѣленія разстоянія между линіями, проходящими черезъ точки, замѣщающія отдѣльныя структурныя единицы въ рисункѣ, мы все еще не знаемъ, какъ въ дѣйствительности расположены цвѣты и листья вокругъ этихъ точекъ.

Какимъ же образомъ мы можемъ достичь болѣе полнаго опредѣленія структуры?

Мы здѣсь подходимъ къ задачѣ, которая тѣмъ болѣе трудна, чѣмъ болѣе сложенъ составъ кристалла, и — прибавимъ еще — чѣмъ меньшимъ количествомъ видовъ симметріи онъ обладаетъ. При дальнѣйшемъ изученіи вопроса мы безусловно станемъ болѣе опытными въ истолкованіи фактовъ. Пока же мы сдѣлали нѣкоторые успѣхи съ болѣе простыми и болѣе симметричными кристаллами. Въ дальнѣйшемъ мы надѣемся взяться за болѣе трудныя проблемы.

Методъ примѣненія x-лучей не обманулъ нашихъ надеждъ. Дѣйствительно, до сихъ поръ мы изложили лишь часть того, что можетъ намъ дать этотъ методъ. Восполнимъ нѣсколько наше изложеніе.

Какъ мы уже говорили, при извѣстной длинѣ волны и извѣстномъ промежуткѣ между поверхностями, отраженіе происходитъ лишь при извѣстномъ углѣ паденія. Если мы теперь станемъ измѣнять положеніе кристалла по отношенію къ падающему на него пучку x-лучей, такъ что уголъ, образуемый пучкомъ и поверхностями удвоится, или, точнѣе говоря, синусъ этого угла удвоится, то и при этомъ углѣ также произойдетъ отраженіе. Отраженіе произойдетъ также тогда, когда уголъ увеличится втрое, вчетверо и т. д. Другими словами, при постепенномъ увеличеніи угла отраженіе будетъ происходить при извѣстной послѣдовательной серіи положеній. Мы говоримъ объ отраженіи перваго порядка, второго порядка, третьяго и т. д.

Замѣтимъ далѣе, что спектрометръ даетъ намъ возможность измѣрять интенсивность отраженнаго пучка. Мы можемъ сравнить между собою интенсивности пучковъ при отраженіяхъ различнаго порядка. Полученныя величины не будутъ зависѣть отъ разстоянія между плоскостями, а будутъ находиться въ прямой связи съ распредѣленіемъ атомовъ, находящихся вблизи этихъ плоскостей. Спектрометръ служитъ намъ прежде всего для того, чтобы опредѣлить разстоянія между плоскостями и относительное положеніе замѣщающихъ точекъ. А затѣмъ онъ выясняетъ намъ распредѣленіе вокругъ замѣщающихъ точекъ различныхъ центровъ отраженія, будь то атомы, части атомовъ или что-либо другое.

Чтобы уяснить себѣ смыслъ того, что относительная интенсивность отраженій различнаго порядка зависитъ отъ распредѣленія элементовъ структуры вокругъ замѣщающихъ точекъ, обратимся къ аналогичному факту, открываемому прежними спектрометрическими методами. Если для анализа свѣта пользоваться диффракціонной рѣшеткой, то мы находимъ цѣлый рядъ спектровъ, различные порядки которыхъ соотвѣтствуютъ серіи угловъ, съ извѣстной правильностью увеличивающихся. Интенсивность спектровъ различныхъ порядковъ зависитъ главнымъ образомъ отъ формы нарѣзокъ въ рѣшеткѣ. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ спектры опредѣленныхъ порядковъ могутъ совершенно отсутствовать. Напримѣръ, можно совершенно устранить спектры второго порядка, если провести на рѣшеткѣ двойныя нарѣзки такъ, чтобы разстояніе между нарѣзками равнялось четверти нормаль-

наго. То же самое мы имѣемъ и въ кристаллахъ: расположеніе атомовъ вокругъ замѣщающихъ точекъ существенно вліяетъ на относительную интенсивность отраженныхъ x-лучей различнаго порядка. Но на уголъ, при которомъ отраженіе происходитъ, расположеніе это никакого вліянія не имѣетъ.

Поэтому изслѣдованіе наше должно заняться относительной интенсивностью отраженныхъ лучей различнаго порядка по отношенію къ различнымъ важнымъ поверхностямъ кристалловъ. На основаніи этого изслѣдованія мы можемъ установить распредѣленіе атомовъ. При этомъ мы встрѣчаемъ нѣкоторыя трудности; остановимся на одной изъ нихъ. По всему вѣроятію, атомъ занимаетъ такой объемъ, который самъ по себѣ долженъ имѣть замѣтное вліяніе на интенсивность отраженныхъ лучей. Нужно думать, что форма и объемъ различныхъ атомовъ неодинакова. Мы надѣемся, что въ концѣ концовъ мы достигнемъ знанія о распредѣленіи центровъ отраженія внутри атома, и что постольку мы ознакомимся и съ атомной структурой. Въ настоящее же время только что разобранный фактъ еще болѣе увеличиваетъ трудности толкованія. Методъ изученія интенсивности отраженныхъ лучей принесъ намъ существенную пользу при анализѣ структуры нѣкоторыхъ кристалловъ, но, повидимому, до сихъ поръ методъ этотъ далъ намъ очень немного въ сравненіи съ тѣмъ, что онъ еще можетъ дать.

Разсмотримъ теперь другой вопросъ, представляющій также большой интересъ. Структурная единица въ кристаллѣ должна непремѣнно содержать цѣлое число молекулъ. Вѣроятно, число это очень мало въ случаѣ болѣе простыхъ кристалловъ. Однако, не слѣдуетъ думать, что существуетъ только одинъ способъ подраздѣленія кристалла на структурныя единицы. Возвратимся опять къ примѣру съ обоями. Предположимъ для простоты, что замѣщающія точки находятся всѣ на мѣстахъ пересѣченія линій, расположенныхъ на одинаковомъ разстояніи одна отъ другой и пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ. Какія бы замѣщающія точки мы ни выбрали, рисунокъ будетъ покрытъ маленькими квадратами, изъ которыхъ каждый содержитъ совершенно одинаковыя части рисунка; содержимое квадрата будетъ единицей рисунка при какомъ угодно способѣ подраздѣленія. Если, напримѣръ, листъ лежитъ посрединѣ между двумя совершенно одинаковыми цвѣтами, то съ одинаковымъ правомъ этотъ листъ можетъ быть включенъ въ единицу рисунка съ каждымъ изъ этихъ цвѣтовъ. Точно такимъ же образомъ въ случаѣ кристалла, часто невозможно сказать, находится ли какой либо атомъ въ одной структурной единицѣ съ однимъ изъ своихъ сосѣдей или съ другимъ. Въ каменной соли шесть атомовъ натрія находятся на одинаковомъ разстояніи отъ атома хлора; послѣдній можно скомбинировать съ какимъ угодно изъ этихъ атомовъ натрія. Въ магнитномъ желѣзнякѣ съ двухъ противоположныхъ сторонъ трехвалентнаго атома желѣза на одинаковомъ разстояніи отъ послѣдняго находится по двухвалентному атому, и нѣтъ никакого

основанія для того, чтобы скомбинировать атомъ желѣза съ однимъ изъ двухъ другихъ атомовъ предпочтительнѣе передъ другимъ. Въ кристаллѣ нѣтъ совершенно отдѣльныхъ молекулъ; мы въ правѣ выразиться, что цѣлый кристаллъ представляетъ собою одну молекулу.

Возникаетъ вопросъ, согласуются ли описанныя данныя о структурѣ кристалловъ съ обычнымъ представленіемъ о томъ, что въ кристаллѣ атомы уложены тѣсно другъ возлѣ друга. На это отвѣтимъ, что согласіе здѣсь имѣется далеко не очевидное. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ ясно, что атомы слѣдуетъ представлять себѣ въ видѣ сферъ, расположенныхъ самымъ тѣснымъ образомъ одна подлѣ другой. Это мы имѣемъ, напримѣръ, въ случаѣ мѣди. Съ другой стороны алмазъ есть кристаллъ, атомы котораго расположены не тѣсно, если только мы не станемъ комбинировать атомы по два (однимъ изъ четырехъ возможныхъ способовъ) и не замѣнимъ каждую пару сферой; однако, послѣднее было бы совершенно произвольнымъ. Атомы цинка въ цинковой обманкѣ расположены тѣсно, если мы не примемъ во вниманіе атомовъ сѣры. Для того, чтобы представить себѣ строеніе этого кристалла въ видѣ тѣсной укладки, мы должны соединить вмѣстѣ атомъ цинка и атомъ сѣры (что мы тоже можемъ сдѣлать однимъ изъ четырехъ способовъ) и представить себѣ, что пара образуетъ сферу. Было бы слишкомъ смѣло сказать, что теорія тѣсной укладки частицъ совершенно неосновательна, но въ настоящее время теорія эта не можетъ намъ служить въ качествѣ теоріи руководящей.

До настоящаго времени мы проникли лишь въ небольшую часть той широкой области изслѣдованія, о которой мы говорили въ настоящей статьѣ. Не будетъ слишкомъ смѣлымъ надѣяться на то, что, при дальнѣйшемъ прогрессѣ нашихъ знаній въ этой области, будутъ сдѣланы важныя открытія. Теперь же предвидится работа въ этомъ направленіи для многихъ изслѣдователей въ теченіе цѣлаго ряда лѣтъ

ПОЛЕМИКА.

Два замѣчанія по поводу рѣчи Ричардсона „Электроны и теплота", помѣщенной въ № 644—645 „Вѣстника".

Н. А. Гезехуса.

§ 1. Задавшись цѣлью провести аналогію между выбрасываніемъ нагрѣваемыми тѣлами электроновъ и обыкновеннымъ испареніемъ, Ричардсонъ произвелъ въ началѣ лекціи опыты, показывающіе вліяніе температуры на выдѣленіе изъ тѣла іоновъ. 1) Онъ показалъ, что при темно-красномъ каленіи

тонкая платиновая проволока, нагрѣваемая электрическимъ токомъ, притягивается приближаемымъ къ ней положительно наэлектризованнымъ стержнемъ и не отклоняется вовсе, когда стержень наэлектризованъ отрицательно. Отсюда онъ заключаетъ, что проволока при этомъ условіи выбрасываетъ будто-бы изъ себя положительные іоны. По моему же, этотъ фактъ объясняется тѣмъ, что во второмъ случаѣ происходитъ уравновѣшиваніе между притяженіемъ и отталкиваніемъ, такъ какъ при слабомъ нагрѣваніи и выдѣленіе электроновъ слабое, а слѣдовательно, одновременно около поверхности проволоки будутъ находиться оба электрическихъ слоя: + и —, несоединяющіеся между собою, вслѣдствіе нагрѣванія, 2) Когда проволока была нагрѣта до бѣлаго каленія, тогда на нее не дѣйствовали ни + ни — заряды стержня. По Ричардсону, это доказываетъ, что при этомъ выдѣлялись изъ проволоки и + и — іоны. Я же увѣренъ, что подъ дѣйствіемъ очень высокой температуры здѣсь происходила просто потеря заряда въ стержнѣ, вслѣдствіе образованія въ воздухѣ газъ-іоновъ + и —. 3) Въ случаѣ лампочки накаливанія дѣйствіе наэлектризованнаго тѣла на раскаленную нить какъ разъ обратно тому, что въ случаѣ 1) темно-краснаго каленія въ воздухѣ: притяженіе замѣчается при стержнѣ —, а не +. Объясняется это просто тѣмъ, что въ пустотѣ электроны очень быстро освобождаютъ проволоку отъ отрицательнаго заряда; слѣдовательно, при стержнѣ — на проволокѣ будетъ находиться только одинъ индуктированный слой +, а при + индуктированный слой — тотчасъ же удалится съ проволоки.

Выдѣленіе при постепенномъ нагрѣваніи проволоки сперва только положительныхъ іоновъ было установлено какъ результатъ опытовъ надъ трубками съ разрѣженнымъ воздухомъ, въ которыхъ одинъ электродъ представлялъ накаливаемую проволоку, а другой электродъ окружающую ее металлическую трубку. Я указалъ въ 1910 г. (въ статьѣ: „Односторонняя проводимость электролитовъ при неравныхъ электродахъ“ Ж. Р. Ф.-Х. Общ.), что упомянутый результатъ только кажущійся и можетъ быть объясненъ именно неравенствомъ величинъ поверхностей электродовъ. При нагрѣваніи проволоки будетъ нагрѣваться и окружающая ее трубка, которая и въ свою очередь будетъ испускать электроны; направленіе тока, поэтому, будетъ зависѣть отъ того, съ какой стороны будетъ больше переноситься электроновъ; при невысокихъ температурахъ вообще будетъ больше переноситься съ электрода, обладающаго большею поверхностью, а при высокихъ температурахъ — наоборотъ, какъ это показываютъ непосредственные опыты. Слѣдовательно, мы видимъ, что во всѣхъ случаяхъ, какъ въ воздухѣ, такъ и въ пустотѣ, нѣтъ надобности принимать дѣйствительное существованіе потока положительныхъ іоновъ при сравнительно незначительномъ нагрѣваніи.

§ 2. Второе замѣчаніе касается вопроса объ аналогіи между выбрасываніемъ электроновъ и испареніемъ. Тѣло, выбрасывающее изъ себя электроны, должно, слѣдовательно, охлаждаться, такъ же какъ и испаряющееся тѣло. Такое охлажденіе проволоки было дѣйствительно обнаружено при помощи мостика Витстона Ричардсономъ и Кукомъ.

Кстати упомяну здѣсь для подкрѣпленія этого результата о моихъ опытахъ, приведшихъ меня къ такому же заключенію, вскорѣ же послѣ опытовъ

Кюри и Лаборда въ 1903 году помощью калориметра о непрерывномъ выдѣленіи солями радія теплоты. Опыты, произведенные мною вмѣстѣ съ Н. М. Георгіепскимъ при помощи простыхъ термометровъ и термоэлементовъ показали несомнѣннымъ образомъ, что бромистый радій находится вообще при температурѣ низшей, чѣмъ окружающій воздухъ. (Доложено физ. отд. Русск. Физ.-Хим. Общ. въ апрѣлѣ 1903 г.). Для примѣра приведу здѣсь одинъ изъ результатовъ опытовъ съ термо-электрическимъ элементомъ: „Когда подъ однимъ изъ контактовъ проволокъ термоэлемента пододвигался радій, то отклоненія на шкалѣ гальванометра получались послѣдовательно черезъ двѣ минуты слѣдующія: +18, +6, +3, +3, −2 и т. д. Когда радій отодвигался въ сторону, то черезъ 1 минуту получилось: −23, −2, +2, +2 и т. д. Слѣдовательно, и здѣсь, какъ въ опытахъ съ термометрами, подъ дѣйствіемъ лучей радія наблюдается сперва нагрѣваніе, а затѣмъ постепенное охлажденіе: когда же радій удалить отъ металловъ, то замѣчается сперва быстрое охлажденіе, а затѣмъ медленное нагрѣваніе. Разница только въ томъ, что дѣйствіе радія на металлы проявляется быстрѣе, чѣмъ на стекло термометра: что здѣсь минуты, то тамъ часы“.

Итакъ, радій, испуская изъ себя частички α, β и γ, самъ не нагрѣвается какъ это до сихъ поръ многіе полагаютъ, а охлаждается, какъ это и слѣдовало ожидать. Поэтому и Д. И. Менделѣевъ, упомянувъ о моихъ изслѣдованіяхъ о бромистомъ радіѣ, высказывается вообще по поводу работъ надъ радіоактивностью о необходимости большой осторожности въ выводахъ. („Основы Химіи“ 8 изд. 1906, стр. 735). Мнѣ думается, какъ на это было указано въ первомъ замѣчаніи, что слишкомъ скороспѣлый и неосторожный выводъ былъ сдѣланъ и относительно выдѣленія положительныхъ іоновъ въ началѣ нагрѣванія проволокъ.

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника“, подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

О. Д. Хвольсонъ. *Краткій курсъ физики для медиковъ, естественниковъ и техниковъ.* Ч. IV. «Ученіе о магнитныхъ и электрическихъ явленіяхъ» съ 200 рис. въ текстѣ. Изд. К. Л. Риккера. Петроградъ, 1916. Стр. IV+432. Ц. 2 р.

И. Н. Якубовичъ. *I. Причина всемірнаго тяготѣнія. II. Гипотеза о приближеніи земли къ солнцу.* Изд. 2-ое. Исправл. и дополн. Ц. 30 к.

К. Ціолковскій. *1. Дополнительныя техническія данныя къ построенію металлической оболочки дирижабля безъ дорогой верфи. 2. Отзывы Леденцовскаго Общества о моемъ дирижаблѣ.* Калуга, 1915. Стр. 10. Ц. 10 к.

Я. Линцбахъ. *Принципы философскаго языка.* Опытъ точнаго языкознанія. Болѣе 200 черт. и таблицъ въ текстѣ. Петроградъ, 1916. Стр. XII+228. Ц. 2 руб. 50 к.

М. О. Зиминъ. *О кривой проходящей въ области всѣхъ точекъ нѣкотораго объема.* Новочеркасскъ. 1916.

Д. Л. Волковскій. *Дѣтскій міръ въ числахъ.* Для начальныхъ школъ Изд. т-ва Сытина. Москва, 1916 Ц. 20 к.

Его же. *Руководство къ «Дѣтскому міру въ числахъ».* Ч. I. Первый годъ обученія. Съ рисунками. Изд. т-ва Сытина. Москва, 1916. Стр. 323. Ц. 1 р. 50 к.

Д. А. Бемъ, А. А. Волковъ и Р. Э. Струве. *Сборникъ упражненій и задачъ по элементарному курсу алгебры.* Ч. I. Курсъ III и IV классовъ.

Н. В. Кашинъ. *Основанія математическаго анализа.* Учебн. старш. классовъ средней школы. Изд. т-ва В. В. Думнова. Москва, 1916. Стр. VIII + 300. Ц. 3 руб.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей профессора Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 327 (6 сер.) Въ данную окружность вписать треугольникъ ABC, зная отношенія отрѣзковъ $AD:DC$ и $AE:EB$, опредѣляемыхъ высотами треугольника BD и CE на сторонахъ AC и AB.

И. Александровъ (Москва).

№ 328 (6 сер.). Найти вещественные корни уравненія

$$\sqrt{y^2+(x-z+4)^2}+\sqrt{3u^3-5zu}+\sqrt{v^2-4v+13}+\sqrt{(u^2-y-5)^2+(x-2z+5)^2}=z+2,$$

въ которомъ всѣ радикалы имѣютъ по условію ариѳметическія значенія.

X. (Петроградъ).

№ 329 (6 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$(1+2+3+\cdots+x)(1^2+2^2+3^2+\cdots+x^2)(1^3+2^3+3^3+\cdots+x^3)=y^4.$$

Е. Рѣзницкій (Вязьма).

№ 330 (6 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x^2(x+6y)+3y^2(4x+3y)=65, \quad x+3y=5.$$

Г. Боевъ. (Саратовъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 282 (6 сер.). *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе*

$$x^{2y-11x}+y^{2x}=y^x x^{y-10x}+y^x x^{y-x}.$$

Представивъ данное уравненіе послѣдовательно въ видѣ

$$x^{y-x}x^{y-10x}+y^{2x}-y^x x^{y-10x}-y^x x^{y-x}=0,$$

$$x^{y-10x}(x^{y-x}-y^x)-y^x(x^{y-x}-y^x)=0,$$

$$(x^{y-10x}-y^x)(x^{y-x}-y^x)=0,$$

приводимъ рѣшеніе даннаго уравненія къ рѣшенію двухъ уравненій

$$(1)\quad x^{y-10x}=y^x \quad \text{и} \quad (2)\quad x^{y-x}=y^x.$$

При рѣшеніи уравненій (1) и (2) въ цѣлыхъ числахъ мы будемъ пользоваться слѣдующими двумя соображеніями. 1) Если цѣлыя числа a, b, m и n удовлетворяютъ равенству (3) $a^m=b^n$, при чемъ $|a|>1$, $|b|>1$ и каждое изъ чиселъ m и n отлично отъ нуля, то m и n одного знака; въ самомъ дѣлѣ, въ противномъ случаѣ одна изъ частей равенства (3) была бы цѣлымъ, а другая дробнымъ числомъ. 2) Если цѣлыя и отличныя отъ нуля числа x, y, m и n удовлетворяютъ равенству (4) $x^m=y^n$, то одно изъ частныхъ $y:x$ или $x:y$ должно быть числомъ цѣлымъ и отличнымъ отъ нуля. Дѣйствительно, если $m=n$, то изъ равенства (4) слѣдуетъ, что $x=y$ или $x=-y$, а потому $x:y=\pm 1$ и $y:x=\pm 1$. Если $m>n$, то, представивъ равенство (4) въ видѣ $x^{m-n}=\left(\frac{y}{x}\right)^n$, заключаемъ отсюда, что $y:x$, какъ корень n-ой степени изъ цѣлаго и неравнаго нулю числа x^{m-n}, есть число цѣлое и не равное нулю; если же $m<n$, то, представивъ равенство (4) въ видѣ $\left(\frac{x}{y}\right)^n=y^{n-m}$, заключаемъ отсюда аналогичнымъ образомъ, что $x:y$ есть число цѣлое и не равное нулю. Полагая въ уравненіи (1) $x=0$ или $y=0$, находимъ, что соотвѣтственно y или x можетъ равняться лишь нулю; но найденное рѣшеніе $x=0$, $y=0$ должно быть отброшено, такъ какъ при этихъ значеніяхъ x и y обѣ части равенства (1) обращаются въ неопредѣленное выраженіе 0^0. Полагая $x=1$, находимъ путемъ непосредственной постановки, что $|y|=1$, и, испытавъ значенія $y=\pm 1$, приходимъ къ единственно возможному при сдѣланномъ предположеніи рѣшенію (5) $x=1$, $y=1$; наоборотъ, при $y=1$ находимъ, что $x=1$; подобнымъ же образомъ при $x=-1$ получимъ, что $y=-1$, и наоборотъ, и получаемъ такимъ путемъ рѣшеніе (6) $x=-1$, $y=-1$. Теперь остается отыскать лишь тѣ рѣшенія уравненія (1), для которыхъ $|x|>1$ и $|y|>1$. Изъ равенства (1), такъ какъ x и y числа цѣлыя, вытекаетъ согласно съ указаніемъ 2), что либо (7) $y=xz$ либо (8) $x=yz$, гдѣ z цѣлое не равное нулю число. Примѣняя подстановку (7), приводимъ уравненіе (1) къ виду $x^{xz-10x}=(xz)^x$, откуда извлекая корень степени x, находимъ, что $x^{z-10}=\pm xz$, т. е. (9) $x^{z-11}=\pm z$. Изъ равенства (9) слѣдуетъ, что по,

казатель $z-11$ есть число положительное. Въ самомъ дѣлѣ, если $z-11=0$, то тогда $z=11$. и въ то же время, согласно съ равенствомъ (9), $|z|=1$, что невозможно; если $z-11<0$, то, такъ какъ $|x|>1$, лѣвая часть равенства (9) есть число дробное, а правая — цѣлое, что также невозможно. Остается принять, что $z-11>0$, т. е. $z>11$. Итакъ z — цѣлое число, большее 11. При $z=12$ изъ равенства (9) слѣдуетъ, что $x=\pm 12$, откуда [см. (7)] соотвѣтственно $y=\pm 144$. Каждое изъ полученныхъ рѣшеній оказывается по провѣркѣ годнымъ, и такимъ образомъ мы нашли рѣшенія (10) $x=12$, $y=144$ и (11) $x=-12$, $y=-144$, и никакихъ новыхъ рѣшеній подстановка (7) дать не можетъ. Дѣйствительно, записавъ равенство (9) въ видѣ $x=\sqrt[z-11]{\pm z}$ и испытывая значенія $z=13$, 14, 15, 16 путемъ непосредственной подстановки, убѣждаемся, что ни одно изъ этихъ значеній z не даетъ цѣлаго рѣшенія уравненія (1). Пусть теперь $z>16$, т. е. $z=16+h$, гдѣ h — цѣлое положительное число; тогда [см. (9)]

$$(12)\quad |x|^{z-11}=|x|^{5+h}\geqq 2^{5+h}=(1+1)^{5+h},$$

такъ какъ цѣлое число $|x|$ удовлетворяетъ по условію неравенству $|x|>1$. Удержавъ въ разложеніи $(1+1)^{5+h}$ по строкѣ бинома лишь три первыхъ члена, находимъ, что

$$(1+1)^{5+h}>1+(5+h)+\frac{(5+h)(4+h)}{2}>1+5+h+\frac{5\,.\,4}{2}=16+h=z=|\pm z|,$$

откуда $2^{5+h}>|\pm z|$, а потому при $z>16$ согласно съ формулами (12) $|x|^{z-11}>|\pm z|$ что противорѣчитъ равенству (9). Подстановка же (8) совсѣмъ не даетъ цѣлыхъ рѣшеній. Дѣйствительно, примѣняя ее, получимъ равенство $(yz)^{y-10yz}=y^{yz}$, гдѣ y и z — цѣлыя числа, отличныя отъ нуля; извлекая корень степени z, получимъ $(yz)^{1-10z}=\pm y^z$, откуда находимъ послѣдовательно, что $y^{1-10z}z^{1-10z}=\pm y^z$, (13) $\pm z^{1-10z}=y^{11z-1}$. Каждый изъ показателей $1-10z$ и $11z-1$ отличны отъ нуля, такъ какъ равенства $1-10z=0$ и $11z-1=0$ возможны соотвѣтственно лишь при $z=\frac{1}{10}$ и $z=\frac{1}{11}$, а z должно быть цѣлымъ. Такъ какъ по условію $|y|>1$, а потому [см. (13)] и $|z|>1$, то, примѣняя къ равенству (13) указаніе 1), приходимъ къ выводу, что либо

$$(14)\quad 1-10z>0,\quad 11z-1>0,\quad \text{либо}\quad (15)\quad 1-10z<0,\quad 11z-1<0.$$

Но въ первомъ случаѣ изъ неравенствъ (14) находимъ, что $\frac{1}{11}<z<\frac{1}{10}$, что невозможно, такъ какъ z число цѣлое, а во второмъ случаѣ неравенства (15) даютъ противорѣчащіе одинъ другому предѣлы для z, а именно $z>\frac{1}{10}$, $z<\frac{1}{11}$. Такимъ образомъ формулы (5), (6), (10), (11) даютъ всѣ цѣлыя рѣшенія уравненія (1).

Примѣнимъ подобный же методъ рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ къ уравненію (2). Устранивъ, какъ и раньше, предположенія, что $x=0$ или $y=0$, пробуемъ допустить, что $|x|=1$ или $|y|=1$, и убѣждаемся путемъ подста-

новки, что это допущеніе приводитъ къ цѣлымъ рѣшеніямъ (16) $x = 1$, $y = 1$ и (17) $x = -1$, $y = 1$. Полагая въ дальнѣйшемъ $|x| > 1$ и $|y| > 1$, примѣнимъ къ уравненію (2) подстановку (7). Тогда находимъ послѣдовательно, что $x^{xz-x} = (xz)^x$, $x^{z-1} = \pm xz$,

$$(18) \quad x^{z-2} = \pm z, \quad \text{или же} \quad (19) \quad x = \sqrt[z-2]{\pm z}.$$

Разсуждая надъ равенствомъ (18) такъ же, какъ мы разсуждали выше надъ равенствомъ (9), находимъ, что цѣлое число z должно быть больше 2. Полагая $z = 3$ и $z = 4$, приходимъ къ возможности [см. (19), (7)] рѣшеній $x = \pm 3$, $y = \pm 9$ и $x = \pm 2$, $y = \pm 8$. Послѣ провѣрки находимъ, что изъ нихъ дѣйствительно годны цѣлыя рѣшенія

$$(20) \quad x = 3, \quad y = 9, \quad (21) \quad x = 2, \quad y = 8, \quad (22) \quad x = -2, \quad y = -8.$$

Если $z > 4$, то $z = 4 + h$, гдѣ h цѣлое положительное число. Но тогда

$$|x|^{z-2} = |x|^{2+h} \geqq (1+1)^{2+h} > 1 + (2+h) \cdot 1 + 1 = 4 + h = |\pm z|,$$

откуда $|x|^{z-2} > |\pm z|$, что противорѣчитъ равенству (18); поэтому подстановка (7) даетъ лишь новыя цѣлыя рѣшенія (20), (21), (22). Подстановка же (8) не даетъ новыхъ цѣлыхъ рѣшеній. Дѣйствительно, примѣняя ее, находимъ изъ уравненія (2) послѣдовательно

$$(yz)^{y-yz} = y^{yz}, \quad (yz)^{1-z} = \pm y^z, \quad y^{1-z} z^{1-z} = \pm y^z, \quad (23) \quad z^{1-z} = \pm y^{2z-1}.$$

Изслѣдуя равенство (23) такъ же, какъ мы изслѣдовали равенство (13), приходимъ къ возможности ограничиться разсмотрѣніемъ случая, когда $|z| > 1$, $|y| > 1$, $1 - z \neq 0$, $2z - 1 \neq 0$. Затѣмъ, примѣняя указаніе 1), приходимъ къ выводу, что либо $1 - z > 0$ и $2z - 1 > 0$, либо $1 - z < 0$ и $2z - 1 < 0$; во первое допущеніе невозможно, такъ какъ изъ него имѣемъ $1/2 < z < 1$, а z — число цѣлое; второе же допущеніе приводитъ къ противорѣчащимъ одно другому неравенствамъ $z < 1/2$ и $z > 1$.

Изъ всего сказаннаго выше слѣдуетъ, что формулы (5), (6), (10), (11), и (16), (17), (20), (21), (22) даютъ всѣ цѣлыя рѣшенія первоначальнаго даннаго уравненія, и такимъ образомъ всѣ рѣшенія даннаго уравненія можно записать въ видѣ таблицы

$x = 1;$	$-1;$	$-1;$	$12;$	$-12;$	$3;$	$2;$	$-2,$
$y = 1;$	$-1;$	$1;$	$144;$	$-144;$	$9;$	$8;$	$-8,$

въ которой соотвѣтствующія значенія x и y написаны одно подъ другимъ.

В. Поповъ (Валки, Харьк. губ.); *Д. Полѣевъ* (Одесса); *П. Волохинъ* (Ялта).

Редакторъ прив.-доц. **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ“ — Одесса, Екатерининская, 58.